

جامعة البحث	امتحانات الفصل الأول ٢٠١٨-٢٠١٧	المدة : ساعة ونصف
كلية العلوم	أسئلة مقرر التحليل التكملي (٢)	العلامة: (١٠٠) درجة
قسم الرياضيات	طلاب السنة الرابعة تحليل رياضي	الاسم : <u>د. محمد يوسف حسن</u>
<u>السؤال الأول (١٥ درجة):</u>		

ثبت ان كل مجموعة محدودة $E \subset M$ شبه متراسة (في حالة كان E حققي فقط).

السؤال الثاني (١٥ درجة):

ليكن $A: B \rightarrow B$ مؤثر خطي ومتراس من فضاء بنّاح في نفسه أثبت ان نصف القطر الخطي يعطى بالعلاقة :

$$r_{A,A} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|A^n|}$$

السؤال الثالث (١٥+١٠+٢٥ درجة):

- ١- أثبت انه إذا كان الفضاء الخطي المنظم X متراساً فإنه يكون تفضاً وفصولاً.
- ب- ليكن $A: B \rightarrow B$ مؤثر خطي ومحدود من فضاء بنّاح في نفسه عتق ان $\sigma(A) \neq \emptyset$.

السؤال الرابع (٢٠ درجة):

لتكن متتالية المؤثرات $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ حيث $A_n: l_2 \rightarrow l_2$ المعرفة بالشكل :

$$A_n(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, 0, \dots)$$

أثبت ان هذه المتتالية متراسة ، ولكي يبينها $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ مؤثر غير متراس. هل مؤثر النهاية مع بئر التحليل هو : مؤثر إسقاط أو مؤثر موجب أو مؤثر نيزوميتر.

السؤال الخامس (١٥+١٥+٢٥ درجة):

- ١- ليكن $A: B \rightarrow B$ مؤثر خطي ومحدود من فضاء بنّاح في نفسه أثبت انه إذا كان A^{-1} موجوداً

$$\text{ينتمي إلى } L(B, B) \text{ فنصنف } \left\{ \frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(A) \right\}.$$

- ٢- عرف ما يلي : نظيم هيلبرت شميت للمؤثر A . تتلى الخطية المحدود .

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر

المكتوب صالح العرجة

مع التمنيات بالنجاح والتفوق

حصص ١٦ / ١١ / ٢٠١٨ م.

(في حال كان E حقيقي) : بما أن E^n فضاء خطي ذو n بعد فتوجد قاعدة

مكونة من n عنصر وهي u_1, u_2, \dots, u_n وبالتالي $\forall u \in E^n$ فإنه توجد $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R$ بحيث

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n \text{ ويكون } \|u\|_{E^n} = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ وبالتالي من أجل أي عنصر}$$

$u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n \in E^n$ يوجد $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ ،لنأخذ التطبيق :

$$\varphi: E^n \rightarrow R^n : u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n \mapsto \varphi(u) = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x$$

فتجد أن هذا التطبيق :

معرف تماماً : لأنه مهما يكن $u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n, v = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n \in E^n$

بحيث $u = v$ فإن $x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n$ وبالمطابقة نجد أن

$x_i = y_i, i = 1, 2, \dots, n$ وبالتالي $\varphi(u) = \varphi(v)$ أي أن $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ وبالتالي

تحقق الاقتضاء : $u = v \Rightarrow \varphi(u) = \varphi(v)$ فالتطبيق φ معرف تماماً .

خطي : لأنه مهما يكن $u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n, v = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n \in E^n$ ومهما

يكن $\lambda, \mu \in R$ فإن :

$$\varphi(\lambda u + \mu v) = \varphi(\lambda x_1 u_1 + \lambda x_2 u_2 + \dots + \lambda x_n u_n + \mu y_1 u_1 + \mu y_2 u_2 + \dots + \mu y_n u_n) \Rightarrow$$

$$\varphi(\lambda u + \mu v) = \varphi\{(\lambda x_1 + \mu y_1)u_1 + (\lambda x_2 + \mu y_2)u_2 + \dots + (\lambda x_n + \mu y_n)u_n\} \Rightarrow$$

$$\varphi(\lambda u + \mu v) = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \dots, \lambda x_n + \mu y_n) \Rightarrow$$

$$\varphi(\lambda u + \mu v) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) + (\mu y_1, \mu y_2, \dots, \mu y_n) = \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) + \mu(y_1, y_2, \dots, y_n) = \lambda \varphi(u) + \mu \varphi(v)$$

فالتطبيق خطي أي أن $\varphi(\lambda u + \mu v) = \lambda \varphi(u) + \mu \varphi(v)$

$$\|u\|_{E^n} = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_{R^n} = \|\varphi(u)\|_{R^n} \text{ لأن } \underline{\text{يحافظ على النظم}} :$$

متباين : لأنه مهما يكن $u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n, v = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n \in E^n$ بحيث

② $\varphi(u) = \varphi(v)$ فإن $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ وبالتالي $x_i = y_i$ ، $i=1,2,\dots,n$ ومنه $u=v$ وبالتالي تحقق الاقتضاء : $\varphi(u) = \varphi(v) \Rightarrow u=v$ فالتطبيق φ متباين .

غامر : من أجل أي عنصر $x=(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ يوجد عنصر $u=x_1u_1+x_2u_2+\dots+x_nu_n \in E^n$ بحيث $\varphi(u)=x$. مما سبق نجد أن التطبيق φ إيزومورفزم من E^n في R^n .

الآن ، لنكن $E^n \supset M$ مجموعة محدودة ولنثبت أنها شبه متراسة ، لنكن $\{u^N\}_{N=1}^\infty$ متتالية من

عناصر M عندئذ يكون $u^N = \alpha_1^N u_1 + \alpha_2^N u_2 + \dots + \alpha_n^N u_n$ من أجل $N=1,2,\dots$ حيث

② $\alpha_j^N \in R$ ، $j=1,2,\dots,n$ ، $N=1,2,\dots$ وبما أن $\{u^N\}_{N=1}^\infty$ عناصر من المجموعة المحدودة

M فإن $N=1,2,\dots$ ، $\|u^N\|_r < c$ ، $\exists c > 0$ ولكن $\left(\sum_{i=1}^n (\alpha_i^N)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|u^N\|_r$ وبالتالي

$\left(\sum_{i=1}^n (\alpha_i^N)^2\right)^{\frac{1}{2}} < c$ وبالتالي $|\alpha_j^N| \leq \left(\sum_{i=1}^n (\alpha_i^N)^2\right)^{\frac{1}{2}} < c$ أي أن $|\alpha_j^N| < c$ وذلك لأي j

$N=1,2,\dots$ و $j=1,2,\dots,n$ أي أن المتتالية العددية $\{\alpha_j^N\}_{N=1}^\infty$ محدودة في R وذلك لأي j

$j=1,2,\dots,n$ وحسب مبرهنة فان هذه المتتالية تملك متتالية جزئية متقاربة ولنكن $\{\alpha_j^{N_k}\}_{k=1}^\infty$

ولنكن α_j^0 نهاية هذه المتتالية أي أن $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_j^{N_k} = \alpha_j^0$ وبالتالي توجد في المتتالية الاختيارية

② $\{u^{N_k}\}_{k=1}^\infty$ التي أخذناها في البداية من المجموعة M متتالية جزئية هي $\{u^{N_k}\}_{k=1}^\infty$ بحيث

$u^{N_k} = \alpha_1^{N_k} u_1 + \alpha_2^{N_k} u_2 + \dots + \alpha_n^{N_k} u_n$ من أجل $k=1,2,\dots$ وهي متقاربة من العنصر :

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} u^{N_k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha_1^{N_k} u_1 + \alpha_2^{N_k} u_2 + \dots + \alpha_n^{N_k} u_n) = \\ &= \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_1^{N_k}\right) u_1 + \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_2^{N_k}\right) u_2 + \dots + \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_n^{N_k}\right) u_n = \alpha_1^0 u_1 + \alpha_2^0 u_2 + \dots + \alpha_n^0 u_n = u^0 \end{aligned}$$

① أي أن : $\lim_{k \rightarrow \infty} u^{N_k} = u^0$ فالمتتالية $\{u^{N_k}\}_{k=1}^\infty$ متقاربة ، وبالتالي M شبه متراسة وهو المطلوب

جواب السؤال الثاني (١٥ درجة) : لدينا $|\lambda| \leq \|A\|$ أي أن $\lambda \in \sigma(A)$ وبالتالي فإن $r_{\sigma(A)} \leq \|A\|$ ولما

③ كان $\sigma(A^n) = [\sigma(A)]^n$ وبما أن $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ فإن $r_{\sigma(A^n)} = \sqrt[n]{r_{\sigma(A^n)}} \leq \sqrt[n]{\|A^n\|}$ وبالتالي فإن :

8

$$r_{\sigma(A)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$$

3

$$\text{لدينا } |\lambda| < \|A\| \text{ فإن } (A - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n \text{ وبأخذ } \zeta = \frac{1}{\lambda} \text{ فإن:}$$

$$(A - \lambda I)^{-1} = -\zeta \sum_{n=0}^{\infty} A^n \zeta^n \text{ ، } |\zeta| < \frac{1}{\|A\|}$$

وبما أن كل متسلسلة قوى من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n$ لها نصف قطر تقارب r وتكون هذه المتسلسلة متقاربة

عندما $|\zeta| < r$ وإن نصف قطر التقارب هذا يحسب من العلاقة $r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$ وبالتالي وبما

$$\text{أن } \left\| \sum_{n=0}^{\infty} A^n \zeta^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| |\zeta|^n \text{ فتكون هذه السلسلة متقاربة إذا كان } |\zeta| < r \text{ أي أن}$$

$$h(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1} \text{ تحليلي في كل نقطة } |\lambda| = \frac{1}{|\zeta|} > \frac{1}{r} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$$

من $\rho(A)$ كما أن $h\left(\frac{1}{\zeta}\right) = w(\zeta)$ تحليلي في أي مجموعة Δ من المستوى العقدي C وبالتالي

فإن نصف قطر التقارب هو r نصف قطر أكبر قرص دائري مفتوح مركزه في المبدأ ويقع بأكمله في

Δ ويكون $\frac{1}{r}$ نصف قطر أصغر دائرة في المستوى العقدي مركزها في المبدأ وخارجها يقع بأكمله في

3

$$\rho(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \frac{1}{r} \text{ وبالتالي } r_{\sigma(A)} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq r_{\sigma(A)} \text{ : وبالتالي فإن:}$$

جواب السؤال الثالث (١٥+١٠=٢٥ درجة):

١- ليكن X فضاء خطي منظم ومنراص أي أن X شبه متراسة وبالتالي من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ توجد L شبكة ε - منتهية ، لناخذ المتتالية $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ بحيث أن $\varepsilon_n > 0$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ ،

عندئذ يوجد L شبكة ε_n - منتهية وهي N_{ε_n} وذلك أياً كان $n = 1, 2, \dots$ أي أنه من أجل أي

عنصر $x \in X$ يوجد $y_n \in N_{\varepsilon_n}$ بحيث $\|x - y_n\| < \varepsilon_n$ ، لنضع $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_{\varepsilon_n}$ فنجد أن هذه

المجموعة كثيفة وقابلة للعد إذن الفضاء X فصول .

المجموعة كثيفة لأن : حتى تكون المجموعة N كثيفة يجب أن تكون لصاقتها تساوي الفضاء X كله أي أن تكون كل نقطة $x \in X$ نقطة لاصقة بالمجموعة ، لإثبات ذلك يجب أن نشهد أن أي كرة مفتوحة

مركزها x لتقاطع مع N وهذا واضح ، لنكن $K(x, \varepsilon_n)$ كرة مفتوحة فحسب ما سبق يوجد $y_n \in N_{\varepsilon_n}$ بحيث $\|x - y_n\| < \varepsilon_n$ وهذا يعني ان $y_n \in K(x, \varepsilon_n)$ وبالتالي
 (2) $N \cap K(x, \varepsilon_n) \neq \emptyset$ وبالتالي $y_n \in N \cap K(x, \varepsilon_n)$ وبالتالي $y_n \in N_{\varepsilon_n} \cap K(x, \varepsilon_n)$.
 وبالتالي فإن كل كرة مفتوحة مركزها x لتقاطع مع N وهو المطلوب .
 وواضح ان المجموعة N قابلة للعد لانها اجتماع قابل للعد لمجموعات منتهية ، فهو فصول (2)

الفضاء تام لأن : لنكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية أساسية من الفضاء X هذا يعني انه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي $n_0 = n_0(\varepsilon)$ بحيث ان $n, m > n_0$ ، $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ وبما ان X متراسة فإنه توجد في المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية جزئية مقاربة من عنصر من X
 ولنكن $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ بحيث $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \in X$ وبالتالي من أجل أي عدد k يكون :
 $\|x_k - x_0\| \leq \|x_{n_k} - x_k\| + \|x_{n_k} - x_0\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ وهذا يعني ان المتتالية الأساسية الاختيارية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ مقاربة من العنصر $x_0 \in X$ وبالتالي X تام ، وهو المطلوب .

ب) لنفرض $\sigma(A) = \emptyset$ عندئذ $\rho(A) = C$ وحسب المبرهنة السابقة فإن المؤثر الحلال $R_\lambda(A)$ تحليلي على كل المستوى العقدي C وبالتالي نستنتج حسب التحليل العقدي ان المؤثر $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ هو تابع ثابت أي ان $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1} = \text{const}$ وبما ان $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|R_\lambda(A)\| = 0$ فإن $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1} = 0$ وهذا غير صحيح كون الفضاء B يحوي عناصر غير الصفر أي ان $B \neq \{0\}$ وبالتالي فإن الفرض الحدلي خاطئ وهو المطلوب .

جواب السؤال الرابع (٢٠ درجة) : لدينا $\forall x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in \ell_2$ ، $c=1$ ، $\|Ax\|_2 \leq c\|x\|_2$ ،

فالمؤثرات $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ محدودة ، وبما ان المؤثر $x \neq 0 \in X$ ينقل كل مجموعة محدودة M في ℓ_2 المنطلق إلى مجموعة $A_n(M)$ محدودة في فضاء منتهي البعد $(\ell_2^{(n)})$ الإيزومورفي مع C وحسب مبرهنة تكون هذه المجموعة $A_n(M)$ شبه متراسة إذن متتالية المؤثرات $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متراسة

نهاية هذه المتتالية $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = \lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots) = (\xi_1, \xi_2, \dots) = x = Ix$ ومعروف ان المؤثر I غير متراس في الفضاء غير المنتهي البعد (لان تقارب المتتالية $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ من المؤثر I هو تقارب نقطي وليس بانتظام).

• كي يكون المؤثر مؤثر إسقاط يجب ان يحقق $A^2 = A$ & $A^* = A$

وبما ان $I^2 = I$ & $I^* = I$ أي تحقق شروط مؤثر الإسقاط إذن المؤثر مؤثر إسقاط .

كي يكون مؤثر موجباً يجب تحقق $\langle Ax, x \rangle \geq 0$. لدينا

$$\langle Ix, x \rangle = \langle (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots), (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) \rangle_{\ell_2} =$$

$$\xi_1 \xi_1 + \xi_2 \xi_2 + \dots + \xi_n \xi_n + 0 + 0 + \dots = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \dots + |\xi_n|^2 \geq 0$$

أي أن المؤثر مؤثر موجباً أيضاً حتى يكون المؤثر إيزومتري يجب تحقق $\langle Ax, Ay \rangle_{\ell_2} = \langle x, y \rangle_{\ell_2}$ وبما أن $I = A$ نجد أن: $\langle Ix, Iy \rangle_{\ell_2} = \langle x, y \rangle_{\ell_2}$ إذن المؤثر إيزومتري.

جواب السؤال الخامس (١٠+١٥=٢٥ درجة):

(١) - بما أن A^{-1} موجود وخطي ومحدود عندئذ فإن $\lambda = 0 \in \sigma(A)$ وبالتالي كل عدد $\lambda \in \sigma(A)$ يمكن كتابته بالشكل $\lambda = \frac{1}{\mu}$ حيث μ عدد مناسب ومغاير للصفر.

لنثبت صحة التكافؤ: $\mu \notin \sigma(A) \Leftrightarrow \frac{1}{\mu} \notin \sigma(A^{-1})$

بفرض $\frac{1}{\mu} \notin \sigma(A^{-1}) \Leftrightarrow \left(A^{-1} - \frac{1}{\mu}I\right)^{-1}$ موجود $\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{\mu}A^{-1}(A - \mu I)\right)^{-1}$ موجود

$\Leftrightarrow (A - \mu I)^{-1}$ موجود $\Leftrightarrow -\mu A(A - \mu I)^{-1}$ موجود

على كل الفضاء B $\mu \notin \sigma(A) \Leftrightarrow \frac{1}{\mu} \notin \sigma(A^{-1})$ وبالتالي التكافؤ صحيح $\mu \notin \sigma(A) \Leftrightarrow \frac{1}{\mu} \notin \sigma(A^{-1})$ صحيح

وبالتالي التكافؤ التالي صحيح $\mu \in \sigma(A) \Leftrightarrow \frac{1}{\mu} \in \sigma(A^{-1})$ وهو المطلوب.

(٢) - ليكن H فضاء هيلبرت و A مؤثر خطي ومحدود و $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ قاعدتين و $\langle Au_n, v_n \rangle$

عوامل فورييه لـ Au_n بالنسبة للقاعدة $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ ولنفرض أن $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |\langle Au_n, v_m \rangle|^2 < \infty$ وحسب

مساواة بارسيفال $\|Au_n\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |\langle Au_n, v_m \rangle|^2$ ندعو العدد $N(A) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Au_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |\langle Au_n, v_m \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

بنظام هيلبرت سميت للمؤثر A .

-(شكل ثنائي الخطية): ليكن $L: H \times H \rightarrow \mathbb{C}: (x, y) \mapsto L(x, y)$ ندعو L شكلاً ثنائي الخطية

إذا كان من أجل أي $x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in H$ وأي $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$ يتحقق الشرطان:

$$1. L(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 L(x_1, y) + \lambda_2 L(x_2, y)$$

$$2. L(x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) = \overline{\mu_1} L(x, y_1) + \overline{\mu_2} L(x, y_2)$$

و نقول عن ثنائي L الخطية محدود إذا وجد عدد $c > 0$ بحيث يكون $|L(x, y)| \leq c \|x\| \|y\|$.

مدرس المقرر

انتهت الإجابات

الدكتور سامح العرجة

حمص ١٦ / ١ / ٢٠١٨ م.